Примеры решения задач

Задача 1. Скорость υ распространения электромагнитных волн в некоторой среде равна 200 Мм/с. Определите длину λ электромагнитных волн в этой среде, если их частота колебаний в вакууме ν_0=2 МГц.

Дано	Решение
υ=200 Мм/с=$2\cdot10^8$ м/с ν_0=2 МГц=$2\cdot10^6$ Гц	При переходе из одной среды в другую частота колебаний электромагнитной волны не изменяется, т. е. $\nu=\nu_0$.
λ=?	

Поэтому при скорости распространения υ искомая длина волны в среде

$$\lambda=\frac{\upsilon}{\nu}=\frac{\upsilon}{\nu_0}.$$

Вычисляя, получаем λ=100 м.

Ответ: λ=100 м.

Задача 2. Электромагнитная волна с частотой ν=3 МГц переходит из вакуума в немагнитную среду с диэлектрической проницаемостью ε=7. Определите приращение ее длины волны.

Дано	*Решение*
ν=3 МГц=$3\cdot10^6$ Гц μ=1 $\varepsilon=7$	При переходе электромагнитной волны из вакуума (длина волны в вакууме λ_0) в среду (длина волны в среде λ) приращение длины волны равно
$\Delta\lambda$=?	

$$\Delta\lambda=\lambda-\lambda_0, \qquad (1)$$

$$\text{причем } \lambda_0=\frac{c}{\upsilon} \text{ и } \lambda=\frac{\upsilon}{\nu}, \qquad (2)$$

где c и υ — соответственно скорости распространения электромагнитной волны в вакууме и среде (при переходе из одной среды в другую частота колебаний электромагнитной волны не изменяется: ν = const).

Скорость распространения электромагнитных волн в среде

$$\upsilon=\frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}=\frac{c}{\sqrt{\varepsilon}} \qquad (3)$$

(учли, что среда немагнитная: магнитная проницаемость среды $\mu=1$).

Подставив выражение (3) в (2), а затем (2) в (1), найдем искомое приращение длины волны:

$$\Delta\lambda = \frac{c}{\sqrt{\nu}}\left(\frac{c}{\sqrt{\varepsilon}} - 1\right).$$

Вычисляя, получаем $\Delta\lambda = -62{,}2$ м (длина электромагнитной волны в среде уменьшается).

Ответ: $\Delta\lambda = -62{,}2$ м.

Задача 3. Определите длину электромагнитной волны в вакууме, на которую настроен колебательный контур, если максимальный заряд на обкладках конденсатора $Q_m = 10$ нКл, а максимальная сила тока в контуре $I_m = 1$ А. Активным сопротивлением контура пренебречь.

Дано	*Решение*
$Q_m = 10$ нКл$=10^{-8}$ Кл $I_m = 1$ А $R = 0$	Длина электромагнитной волны в вакууме $\lambda = cT$, (1)
$\lambda = ?$	где $c = 3\cdot 10^8$ м/с - скорость распространения света в вакууме; Т - период колебаний, определяемый по формуле Томсона

$$T = 2\pi\sqrt{LC} \qquad (2)$$

(L – индуктивность катушки; C – электроемкость конденсатора).

В случае незатухающих колебаний (R = 0) полная энергия колебательного контура остается постоянной, и максимальные энергии электрического поля конденсатора и магнитного поля катушки равны:

$$\frac{Q_m^2}{2C} = \frac{LI_m^2}{2}$$

откуда

$$LC = \frac{Q_m^2}{I_m^2}. \qquad (3)$$

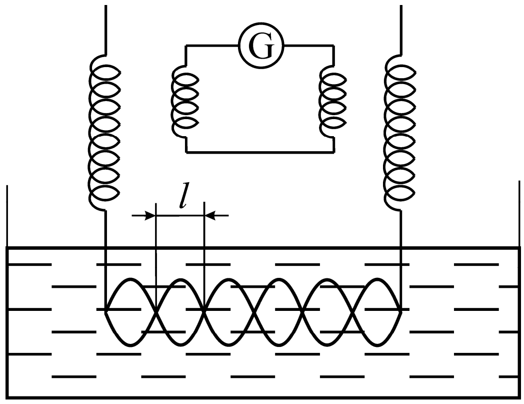
Подставив выражение (3) в формулу (2), а затем (2) в (1), найдем искомую длину волны:

$$\lambda = 2\pi c\frac{Q_m^2}{I_m^2}.$$

Вычисляя, получаем $\lambda = 18{,}8$ м.

Ответ: $\lambda = 18{,}8$ м.

Задача 4. Два параллельных провода, одни концы которых изолированы, а вторые индуктивно соединены с генератором электромагнитных колебаний, погружены в спирт. При соответствующем подборе частоты колебаний в системе возникают стоячие волны. Расстояние между двумя соседними узлами стоячих волн на проводах равно 40 см. Принимая диэлектрическую проницаемость спирта ε=26, а его магнитную проницаемость μ=1, определите частоту колебаний генератора.



Дано	*Решение*
$l = 40$ см=0,4 м ε=26 μ=1 υ=?	В стоячей волне расстояние между двумя соседними узлами равно половине длины бегущей волны, т.е. $l = \lambda / 2$, откуда длина бегущей волны

$$\lambda = 2l. \qquad (1)$$

С другой стороны,

$$\lambda = \upsilon / \nu, \qquad (2)$$

где υ – частота колебаний генератора; ν – скорость распространения электромагнитной волны в спирте:

$$\upsilon = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}} \qquad (3)$$

(учли, что спирт – среда немагнитная, $\mu = 1$).

Приравняв выражения (1) и (2) с учетом (3), получаем

$$2l = \frac{c}{\nu\sqrt{\varepsilon}},$$

откуда искомая частота колебаний генератора

$$\nu = \frac{c}{2l\sqrt{\varepsilon}}.$$

Вычисляя, получаем ν =73,5 МГц.

Ответ: ν =73,5 МГц.

Задача 5. Плоская электромагнитная волна распространяется в однородной и изотропной среде ε=2 и $\mu=1$. Амплитуда напряженности электрического поля волны E_0= 12 В/м. Определите: фазовую скорость волны; амплитуду напряженности магнитного поля волны.

Дано	*Решение*
ε=2 $\mu=1$ E_0= 12 В/м	Фазовая скорость электромагнитных волн $$\upsilon=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}\frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}=\frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}},$$
υ=? H_0=?	

где $c=3\cdot10^8$ м/с – скорость распространения света в вакууме.

В бегущей электромагнитной волне мгновенные значения E и H любой точке связаны соотношением

$$\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0}E=\sqrt{\mu_0\mu}H .$$

Тогда для амплитуд напряженностей электрического и магнитного полей волны

$$\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0}E_0=\sqrt{\mu_0\mu}H_0$$

откуда искомая амплитуда напряженности магнитного поля волны

$$H_0=\frac{\sqrt{\varepsilon_0\varepsilon}}{\sqrt{\mu_0\mu}}E_0 .$$

Вычисляя, получаем $\upsilon=2{,}12\cdot10^8$ м/с; H_0= 45 мА/м.

Ответ: $\upsilon=212$ Мм/с; H_0= 45 мА/м.

Задача 6. Электромагнитная волна распространяется вдоль оси x. Определите диэлектрическую проницаемость среды, если средняя объемная плотность энергии $\langle w\rangle$ в электромагнитной волне равна 2,43 пДж/м^3, а амплитуда напряженности E_0 электрического поля волны равна 0,5 В/м.

Дано	***Решение***
$\langle w \rangle$=2,43 пДж/м^3= $=2{,}43\cdot 10^{-12}$ пДж/м^3 E_0=0,5 В/м	Объемная плотность энергии электромагнитной волны складывается из объемных плотностей $w_{\text{эл}}$ и $w_{\text{м}}$ электрического и магнитного полей волны:
ε=?	

$$w = w_{\text{эл}} + w_{\text{м}} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon E^2}{2} + \frac{\mu_0 \mu H^2}{2}, \qquad (1)$$

где E и H – соответственно напряженности электрического и магнитного полей электромагнитной волны; ε_0=$8{,}85\cdot 10^{-12}$ Ф/м – электрическая постоянная; $\mu_0 = 4\pi\cdot 10^{-7}$ Гн/м – магнитная постоянная; ε и μ – соответственно диэлектрическая и магнитная проницаемости среды.

Учитывая, что в бегущей электромагнитной волне мгновенные значения любой точке связаны соотношением

$$\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0}E = \sqrt{\mu_0\mu}H \qquad (2)$$

получим, что плотности энергий электрического и магнитных полей в каждый момент времени одинаковы, т. е. $w_{\text{эл}} = w_{\text{м}}$. Поэтому выражение (1) можно переписать в виде

$$w = 2 w_{\text{эл}} = \varepsilon_0 \varepsilon E^2, \qquad (3)$$

где E описывается уравнением

$$E = E_0 \cos(\omega t - kx) \qquad (4)$$

(E_0 – амплитуда напряженности электрического поля электромагнитной волны; ω – циклическая частота; k – волновое число; $\varphi = 0$ – начальная фаза).

Мгновенное значение (3) с учетом (4) запишется в виде

$$w = \varepsilon_0 \varepsilon E_0^2 \cos^2(\omega t - kx),$$

а ее среднее значение

$$\langle w \rangle = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \varepsilon E_0^2 \qquad (5)$$

(учли, что среднее значение $\left\langle \cos^2(\omega t - kx) \right\rangle$=1/2), откуда искомая диэлектрическая проницаемость среды

$$\varepsilon = \frac{2\langle w \rangle}{\varepsilon_0 E_0^2}$$

Вычисляя, получаем ε=2,2.

Ответ: ε=2,2.

Задача 7. В вакууме вдоль оси x распространяется плоская электромагнитная волна, падающая перпендикулярно поверхности тела, которое ее полностью поглощает. Определите давление, оказываемое волной на тело, если амплитуда магнитного поля электромагнитной волны равна 0,2 А/м.

Дано	*Решение*
$\mu = 1$ H_0=0,2 А/м $p = ?$	Согласно теории Максвелла, если тело полностью поглощает падающую на него энергию, то давление, оказываемое волной на тело, равно среднему значению объемной плотности энергии в падающей электромагнитной волне, т.е.

$$p = \langle w \rangle \qquad (1)$$

где w – объемная плотность энергии электромагнитного поля

$$w = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon E^2}{2} + \frac{\mu_0 \mu H^2}{2} \qquad (2)$$

где E и H – соответственно напряженности электрического и магнитного полей электромагнитной волны; ε_0=8,85$\cdot 10^{-12}$ Ф/м – электрическая постоянная; $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м – магнитная постоянная; ε и μ – соответственно диэлектрическая и магнитная проницаемости среды.

В бегущей электромагнитной волне мгновенные значения E и H в любой точке волны связаны соотношением

$$\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0} E = \sqrt{\mu_0 \mu} H . \qquad (2)$$

Тогда выражение (2) можно записать в виде

$$w = \mu_0 \mu H^2 , \qquad (3)$$

где H описывается уравнением

$$H = H_0 \cos(\omega t - kx) \qquad (4)$$

(H_0 – амплитуда напряженности магнитного поля электромагнитной волны; ω – циклическая частота; $k = \omega / \upsilon$ – волновое число). Начальная фаза φ принята равной нулю.

Тогда мгновенное значение объемной плотности энергии (3) можно записать в виде

$$w = \mu_0 \mu H_0^2 \cos^2(\omega t - kx) ,$$

а ее среднее значение

$$\langle w \rangle = \frac{1}{2}\mu_0 \mu H_0^2 \qquad (5)$$

(учли, что среднее значение $\langle \cos^2(\omega t - kx) \rangle$=1/2). Так как электромагнитная волна распространяется в вакууме (μ=1), выражение (4) запишется в виде:

$$\langle w \rangle = \frac{1}{2}\mu_0 H_0^2 .$$

Подставив это выражение в формулу (1), найдем искомое давление, оказываемое электромагнитной волной,

$$p = \frac{1}{2}\mu_0 H_0^2 .$$

Вычисляя, получаем p =25,1 нПа.

Ответ: p =25,1 нПа.

Задача 8. В вакууме вдоль оси x распространяется плоская электромагнитная волна. Интенсивность волны, т.е. средняя энергия, проходящая через единицу поверхности за единицу времени, составляет 21,2 мкВт/м^2. Определите амплитуду напряженности электрического поля волны.

Дано	*Решение*
$\varepsilon = 1$ $\mu = 1$ I=21,2 мкВт/м^2= $=2{,}12 \cdot 10^{-5}$ Вт/м^2	Так как интенсивность электромагнитной волны определена как средняя энергия, проходящая через единицу поверхности за единицу времени, то
E_0=?	$$I = \langle S \rangle, \qquad (1)$$

где S – модуль вектора плотности потока электромагнитной энергии – модуль вектора Умова-Пойнтинга. Согласно определению

$$S = EH,$$

где E и H – соответственно мгновенные значения напряженности электрического и магнитного полей волны, описываемые уравнениями

$$E = E_0 \cos(\omega t - kx)$$
$$H = H_0 \cos(\omega t - kx)$$

где E_0 и H_0 – соответственно амплитуды напряженностей электрического и магнитного полей волны; ω – циклическая частота; $k = \omega / \upsilon$ – волновое число (начальная фаза колебаний φ принята равной нулю).

Мгновенное значение модуля вектора Умова-Пойнтинга

$$S = E_0 H_0 \cos^2(\omega t - kx),$$

а его среднее значение

$$\langle S \rangle = \frac{1}{2} E_0 H_0 \qquad (2)$$

(учли, что $\left\langle \cos^2(\omega t - kx) \right\rangle$=1/2). Записав

$$\sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon} E_0 = \sqrt{\mu_0 \mu} H_0,$$

получим

$$H_0 = \frac{\sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon}}{\sqrt{\mu_0 \mu}} E_0 = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} E_0 \qquad (3)$$

(учли, что электромагнитная волна распространяется в вакууме).

Подставив формулу (3) в выражение (2) и учитывая формулу (1), найдем искомую амплитуду напряженности электрического поля волны:

$$E_0 = \sqrt{2I\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}}\,. \qquad ()$$

Вычисляя, получаем E_0 =126 мВ/м.

Ответ: E_0 =126 мВ/м.

Задача 9. Источник монохроматического света с длиной волны λ_0=550 нм движется в вакууме со скоростью $\upsilon = 0{,}2c$ по направлению к наблюдателю. Определите длину волны, которую зафиксирует приемник наблюдателя.

Дано	***Решение***
λ_0=550 нм=$5{,}5 \cdot 10^{-7}$ м $\upsilon = 0{,}2c$ $\theta=\pi$ λ=?	Согласно формуле, описывающей эффект Доплера для электромагнитных полей волн в вакууме, $$\nu = \nu_0 \frac{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}}{1+\frac{\upsilon}{c}\cos\theta}, \qquad (1)$$

где ν_0 и ν – соответственно частоты электромагнитного излучения, испускаемого источником и воспринимаемого приемником; υ – скорость движения источника относительно приемника; θ – угол между вектором скорости $\vec{\upsilon}$ и направлением наблюдения, измеряемый в системе отсчета, связанной с наблюдателем.

Так как по условию задачи $\theta = \pi (\cos\theta = -1)$, а $\nu = c/\lambda$, то выражение (1) можно представить в виде

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda_0}\frac{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}}{1-\frac{\upsilon}{c}},$$

откуда искомая длина волны, фиксируемая приемником наблюдателя,

$$\lambda = \lambda_0 \frac{\sqrt{1-\upsilon/c}}{\sqrt{1+\upsilon/c}}.$$

Вычисляя, получаем λ=449 нм.

Ответ: λ=449 нм.

Задача 10. Определите в вакууме доплеровское смещение $\Delta\lambda$ для спектральной линии атомарного водорода λ_0=434 нм, если ее наблюдать под прямым углом к пучку атомов водорода с кинетической энергией T=150 кэВ.

Дано	*Решение*
$\theta=\dfrac{\pi}{2}$ λ_0=434 нм=$4{,}34\cdot10^{-7}$ м T=150 кэВ=$2{,}4\cdot10^{-14}$ Дж	В данном случае скорость источника перпендикулярна направлению наблюдателя $\theta=\pi/2$, т.е. имеет место поперечный эффект Доплера. Согласно формуле, описывающей поперечный эффект Доплера для электромагнитных волн в вакууме,
$\Delta\lambda$=?	

$$\nu=\nu_0\sqrt{1-\upsilon^2/c^2} \qquad (1)$$

где ν_0 и ν – соответственно частоты электромагнитного излучения, испускаемого источником и воспринимаемого приемником; υ – скорость движения источника относительно приемника; c – скорость света в вакууме. Учитывая, что $\nu=c/\lambda$ и $\nu_0=c/\lambda_0$, а длина волны, фиксируемая приемником наблюдателя, $\lambda=\lambda_0+\Delta\lambda$, выражение (1) можно представить в виде

$$\frac{\lambda_0+\Delta\lambda}{\lambda_0}=\left(1-\frac{\upsilon^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}. \qquad (2)$$

Разложим правую часть выражения (2) в ряд, ограничившись двумя первыми членами:

$$\left(1-\frac{\upsilon^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}\frac{\upsilon^2}{c^2}.$$

Тогда выражение (2) примет вид:

$$\frac{\lambda_0+\Delta\lambda}{\lambda_0}=1+\frac{\upsilon^2}{2c^2} \text{ или } \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0}=\frac{\upsilon^2}{2c^2}. \qquad (3)$$

Так как кинетическая энергия $T=\dfrac{m\upsilon^2}{2}$, то $\upsilon^2=\dfrac{2T}{m}$, и подставив это выражение в формулу (3), найдем искомое доплеровское смещение

$$\Delta\lambda=\lambda_0\frac{T}{mc^2}.$$

Вычисляя, получаем $\Delta\lambda$= 69,3 мм.

Ответ: $\Delta\lambda = 69{,}3$ мм.

Задача 11. Мощность импульса радиолокационной станции P=100 кВт. Найти максимальную напряженность электрического поля волны E_m в точке, где площадь поперечного сечения конуса излучения S = 2,3 км^2.

Дано	***Решение***
P = 100 кВт $\varepsilon_0 = 8{,}85\cdot 10^{-12}\,\dfrac{\Phi}{м}$ $\varepsilon = 1$ $S = 2{,}3\ км^2$	Мощность импульса P связана с энергией волны W соотношением: $$P = \frac{W}{t}, \quad (1)$$ где t – время излучения. С другой стороны, интенсивность, т. е. плотность потока излучения, $I = \dfrac{W}{St}$ или с учетом (1)
E_m = ?	

$$I = \frac{P}{S}. \quad (2)$$

Теперь выразим интенсивность I через объемную плотность энергии волны $w_{эл\cdot м}$, а ту в свою очередь через напряженность электрического поля E_m:

$$I = w_{эл\cdot м}c, \text{ где } w_{эл\cdot м} = \varepsilon_0\,\varepsilon\,E_m^2,$$

$$\text{поэтому } I = \varepsilon_0\,\varepsilon\,E_m^2 c. \quad (3)$$

Нам осталось приравнять (2) и (3) и из полученного равенства определить напряженность E_m:

$$\frac{P}{S} = \varepsilon_0\,\varepsilon\,E_m^2 c,$$

откуда

$$E_m = \sqrt{\frac{P}{\varepsilon_0 \varepsilon c S}}.$$

Произведем вычисления, получим $E_m = 4$ В/м.

Ответ: $E_m = 4$ В/м.